

▼ 6. Függvény közelítése sorfejtéssel: Taylor sor, Fourier sor

Ebben a fejezetben arra a problémára keressük a megoldást, hogyan lehet egy egzakt módon adott függvény bizonyos helyeken vett értékeit egyszerűbben, polinomokkal vagy trigonometrikus függvények összegével megközelíteni.

▼ 6. 1. A Taylor sor fogalma, együtthatóinak meghatározása

Vizsgáljunk először egy, az origo környezetében tetszőleges sokszor differenciálható $f(x)$ függvény viselkedését! Tegyük föl, hogy az $f(x)$ függvény egy $[a, b]$ intervallumban konvergens

hatványsorba fejthető, azaz a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$ hatványsor összegfüggvénye az $[a, b]$ intervallumban $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Ekkor az f deriváltjai a hatványsor tagonkénti deriválásával nyerhetők:

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \dots$$

...

$$\frac{df^n(x)}{dx^n} = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 a_n + \dots$$

Innen:

$$f(0) = a_0; \quad a_0 = f(0)$$

$$f'(0) = a_1 \quad a_1 = f'(0)/1!$$

$$f''(0) = 2 a_2 \quad a_2 = f''(0)/2!$$

...

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \quad a_n = f^{(n)}(0)/n!$$

...

Bebizonyítottuk a következő tételt:

▼ 6. 1. 1. Tétel

Ha $f(x)$ az $x_0 = 0$ helyet tartalmazó intervallumban hatványsorba fejthető, akkor ez a sor szükségképpen megegyezik az

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sorral. $\square$

Ha tehát valamely f függvényt hatványsorba akarunk fejteni, akkor nem kell mást tennünk, mint felírni a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sorát és megvizsgálni, hogy ez valóban előállítja-e a függvényt, ugyanis más hatványsor - az előbbieket alapján - biztosan nem állítja elő.

▼ 6. 1. 2. Definíciók

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ hatványsort az $f(x)$ függvény $x=0$ körüli **Taylor** -**sorának** (Mac Laurin sorának) nevezzük. $\square$

Az $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ értékeket **Taylor-együtthatóknak** nevezzük. $\square$

A $T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ polinomot az $f(x)$ függvény $x=x_0$ helyhez tartozó n -edik **Taylor-polinomjának** nevezzük.

Ha nem az $x=0$, hanem az $x=x_0$ helyhez tartozóan képezzük a sort: hatványsor összegfüggvénye az $f(x)$ a következő alakú lesz::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots$$

▼ 6. 1. 3. Definíciók

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ hatványsort az f függvény $x=x_0$ körüli **Taylor-sorának** nevezzük. $\square$

Az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ kifejezést az f függvény **n -edik maradéktagjának** nevezzük. A Taylor -sor valamely x -re előállítja az f függvényt, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. $\square$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$(x-x_0)^{n+1}$, $\xi \in [-(x-x_0), (x-x_0)]$ alakot a maradéktag Lagrange-féle alakjának nevezzük.

Összefoglalva: Ha $f(x)$ az $x=x_0$ egy környezetében akárhányszor differenciálható és $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n(x) = 0)$, akkor az $f(x)$ függvény Taylor-sora konvergens és előállítja az $f(x)$ függvényt, azaz $f(x)$ az x_0 körül Taylor-sorba fejthető.

▼ 6. 2. Taylor sor meghatározása a Maple-lel

Használt Maple parancsok: [series](#), [taylor](#), [sum](#), [Sum](#), [expand](#)

1. Példa Határozzuk meg az $f(x) = \sin(x)$ függvény $x=0$ körüli ötödik Taylor-polinomját!

Megoldás

> *restart* : $f := x \rightarrow \sin(x)$:

A Taylor-sor előállítására szolgáló Maple utasítás a *series* vagy a *taylor* parancs, ahol meg kell adni a függvényt, x_0 -t, illetve milyen fokszerű tagig adja meg a polinomot. A *series* általánosabb sorfejtésre alkalmas, a *taylor* csak Taylor sorfejtésre használható.

> *series*($\sin(x)$, $x=0$, 6)

$$x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + O(x^7)$$

Az $O(x^7)$ a maradéktagot jelenti. Ebből a Taylor polinom a *convert* paranccsal kiolvasható.

> $T_5(x) = \text{convert}(\%, \text{polynom})$

$$T_5(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

A következő eljárás az egymást követő, $x=0$ körüli Taylor-polinomokat és a függvényt együtt ábrázolja.

> *restart* : *with*(*plots*) :

> *Taylor* := **proc**(*f*, *a*, *b*, *c*, *d*, *N*, *Sx*, *Sy*)

local *H*, *n*, *szam*, *S*, *P*, *F*;

H := *textplot*([*Sx*, *Sy*, *Polinom fokszeru*], *align* = *LEFT*);

F := *plot*(*f*, *x* = *a* .. *b*, *y* = *c* .. *d*);

for *n* **from** 0 **to** *N* **do**

szam := *convert*(*n*, *string*);

S := *textplot*([*Sx*, *Sy*, *szam*], *align* = *RIGHT*);

P := *plot*(*convert*(*series*(*f*, *x* = 0, *n* + 1), *polynom*), *x* = *a* .. *b*, *color* = *BLUE*);

Kep || *n* := *display*([*F*, *P*, *H*, *S*])

end do

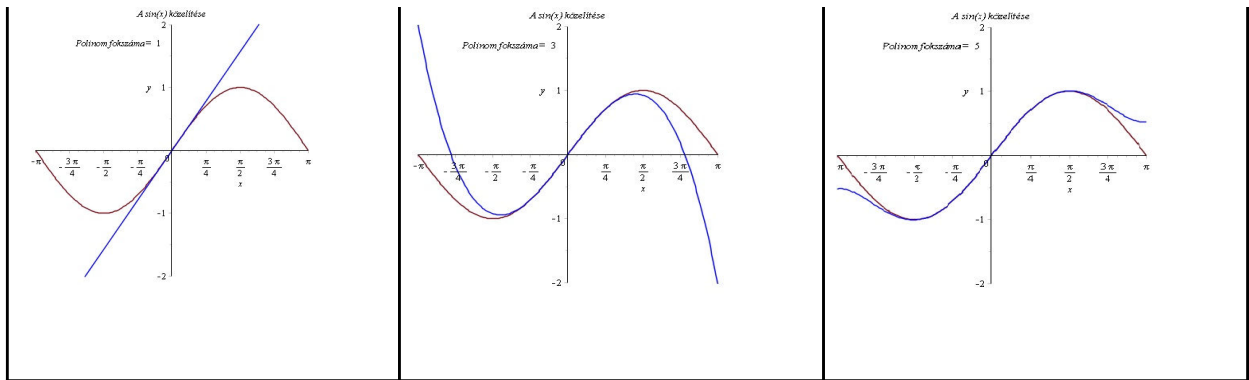
end proc :

Az eljárás meghívásakor a függvényt, az ábrázolás tartományait (*x_bal*, *x_jobb*, *y_alsó*, *y_felső*), a legmagasabb polinom fokszerűségét, a fokszerű kiírásának kezdőpontját (*x*, *y* koordinátákkal) kell megadni. Az eljárás futtatásának eredményeként *N* számú kép készül, amit aztán a *display* utasítással tudunk megjeleníteni.

> $f := \sin(x)$: $N := 12$: *Taylor*(*f*, $-\pi$, π , -2, 2, *N*, -0.4, 1.7) :

> *display*([*Kep* || (0 .. *N*)], *title* = *A sin(x) közelítése*, *insequence* = *true*);

--	--	--



2. Példa Fejtsük Taylor-sorba az $f(x) = \arctan(x)$ függvényt!

a; Mely intervallumon érvényes a sorfejtés?

b; Határozzuk meg a sor segítségével π értékét egy előre megadott ε -nál kisebb hibával!

Megoldás

a;

> $f := x \rightarrow \arctan(x)$; $sor := series(f(x), x=0, 10)$

$f := x \rightarrow \arctan(x)$

$$sor := x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 + O(x^{11})$$

Felismerhető, hogy tagonkénti deriválással geometriai sort kapunk:

> $der_sor := series(D(f)(x), x, 10)$

A sorok elméletéből ismert, hogy a derivált annak a geometriai sornak az összegfüggvénye, amelynek első tagja $a = 1$ és hányadosa $q = -x^2$. A sorfejtés érvényes, ha $|x| < 1$.

Meg kell vizsgálni az eredeti sor konvergenciáját a végpontokban. Ha $x=1$, a sor egy váltakozó előjelű sor, ami Leibnitz tétele értelmében konvergens. Ha $x=-1$, a sor csak negatív tagokat tartalmaz, divergens.

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n-1} \right)$$

Megjegyzés: A 1D-s megjelenítéssel jobban megkülönböztethető a Sum és sum utasítások közötti különbség.

> $Sum(-1/(2*n-1), n = 1 .. infinity) = sum(-1/(2*n-1), n = 1 .. infinity);$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n-1} \right) = -\infty$$

Tehát az $f(x)=\arctan(x)$ függvény Taylor-sora a $-1 < x \leq 1$ intervallumban konvergens.

b;

Készítsük el a k -adik részletösszegfüggvényt, $s(k)$ -t:

$$> s := k \rightarrow \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1} :$$

Az *expand* paranccsal kifejtethetjük például az 5. részletösszeget

> `expand(value(s(5)))`

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

A π értékének meghatározásához felhasználjuk, hogy $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, valamint azt, hogy a sor Leibniz-típusú, így az elkövetett hiba kisebb, mint az első, figyelembe nem vett tag abszolút értéke.

Most egy ciklussal meghatározhatjuk, hogy hány tagot kell figyelembe vennünk ahhoz, hogy a kívánt pontosságot elérjük. Ha azt akarjuk, hogy a ciklus működjön, akkor a Digits környezeti változó értékét legalább annyi jegyre kell állítanunk, amennyi a kívánt pontosságú közelítés ábrázolásához szükséges!

> `Digits := 10 : k := 1 : x := 1 : eps := 0.001 :`

> `while eps ≤ evalf(|s(k+1) - s(k)|) do k := k + 1 end do :`

> `print('k=', k-1, tagig kell az elemeket összeadni.)`

k=, 499, tagig kell az elemeket összeadni.

> `Pi_közelto_erteke := 4 evalf(s(k-1))`

Pi_közelto_erteke := 3.143596660

> `Pontos_erteke := 4 evalf(arctan(1))`

Pontos_erteke := 3.141592654

> `Elteres := |  $\frac{\text{Pontos\_erteke}}{4} - \frac{\text{Pi\_közelto\_erteke}}{4}$  |`

Elteres := 0.0005010015

Az eltérést a π negyedrésszére kell kiszámítani. Elértük-e a kívánt pontosságot? Az `is` utasítással választ kapunk erre a kérdésre:

> `is(Elteres < eps)`

true

▼ 6. 3. Fourier sor fogalma, együtthatóinak meghatározása

Használt Maple parancsok: [Int](#), [int](#)

A 6. 2. alfejezetben végtelen sokszor differenciálható függvényeket írtunk fel hatványsorok összegeként. A következőkben **periodikus** (esetleg nem mindenütt folytonos és differenciálható) **függvényeket** írunk fel **trigonometrikus polinomok** segítségével. A tudomány és a technika területén gyakran találkozunk periodikus jelenségekkel, azaz olyanokkal amelyek bizonyos T időintervallumonként ismétlődnek. A legkülönbözőbb jelenségeket periodikus függvényekkel írhatjuk le, amely függvények

$$f(t+T) = f(t)$$

alakúak, ahol t az időt jelenti, T pedig a periódus.

A konstansfüggvényt nem tekintve a legegyszerűbb periodikus függvények a szögfüggvények, például a sinus függvény: $A \sin(\omega t + \alpha)$, ahol ω a körfrekvencia, amelynek a periódussal való

kapcsolatát az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ írja le. Ilyen egyszerű periodikus függvényekből összeadással

komplikáltabb periodikus függvényeket tudunk összetenni. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy előállítható-e egy adott, T periódusú $f(t)$ függvény véges vagy végtelen sok trigonometrikus függvény összegeként.

▼ 6. 2. 1. Definíció

Az $F_n(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots +$

$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ alakú kifejezést

trigonometrikus polinomnak nevezzük. $\square$

Vizsgáljunk először egy tetszőleges, 2π szerint periodikus függvényt, amelyet trigonometrikus függvények sorával szeretnénk felírni.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Az együtthatók meghatározásához felhasználjuk a következő tételeket:

▼ 6. 3. 2. Tétel

Ha k pozitív egész, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 0$. $\square$

Bizonyítás

A bizonyítás során a jobb áttekinthetőség kedvéért a Maple I-D-s matematikai input formáját használjuk.

> restart; assume(k, posint) :

> Int(sin(k*x), x = -Pi .. Pi) = int(sin(k*x), x = -Pi .. Pi) ;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$$

> Int(cos(k*x), x = -Pi .. Pi) = int(cos(k*x), x = -Pi .. Pi) ;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 0$$

▼ 6. 3. 3. Tétel

Ha k és l pozitív egész, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0$. $\square$

Bizonyítás

> assume(l, posint) :

> Int(sin(k*x)*cos(l*x), x = -Pi .. Pi) = int(sin(k*x)*cos(l*x), x = -Pi .. Pi) ;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0$$

▼ 6. 3. 4. Tétel

Ha $k \neq l$ akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0$, ha $k = l$ akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \pi$. $\square$

Bizonyítás

```
> assume(k<>l); additionally(l, posint, k, posint):
> Int(sin(k*x)*sin(l*x), x=-Pi..Pi)=int(sin(k*x)*sin(l*x), x=-
  Pi..Pi);
> k:=1:
```

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0$$

```
> 'Int(sin(k*x)*sin(l*x), x=-Pi..Pi)'=int(sin(k*x)*sin(l*x), x=-
  Pi..Pi);
```

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \pi$$

▼ 6.3.5. Tétel

Ha $k \neq l$ akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0$, ha $k = l$ akkor $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \pi$. □

Bizonyítás

```
> restart; atassume(k<>l): additionally(l, posint, k, posint):
> Int(cos(k*x)*cos(l*x), x=-Pi..Pi)=int(cos(k*x)*cos(l*x), x=-
  Pi..Pi);
> k:=1:
```

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0$$

```
> 'Int(cos(k*x)*cos(l*x), x=-Pi..Pi)'=int(cos(k*x)*cos(l*x), x=-
  Pi..Pi);
```

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \pi$$

Tegyük föl ezek után, hogy a keresett trigonometrikus sor tagonként integrálható. Ennek, és az előbb ismerttetett tételeknek a felhasználásával határozhatjuk meg az együtthatókat.

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának a határozott integrálját a $[-\pi, \pi]$ intervallumon

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos(x) dx + \dots$$

A jobb oldalon az első integrál $\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = 2 a_0 \pi$, a többi pedig a tételek miatt 0. Így

$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{2 \pi}$$

Az egyenlet mindkét oldalát $\cos(nx)$ -szel szorozva

$$f(x) \cos(nx) = a_0 \cos(nx) + a_1 \cos(x) \cos(nx) + b_1 \sin(x) \cos(nx) + \dots a_m \cos(nx) \cos(nx) + \dots$$

A segédtelemek miatt az $a_n \cos(nx) \cos(nx)$ kivételével minden tag integrálja 0, ezé pedig π .
Így:

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n x) dx}{\pi}$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x) dx}{\pi}$$

Megjegyzések:

1. A Fourier-együtthatók értéke nem változik, ha a $[-\pi, \pi]$ intervallum helyett az $[a - \pi, a + \pi]$ intervallumban végezzük el a fenti integrálásokat.
2. Ha f páros függvény, akkor Fourier-sora csak cosinus-os tagokat, ha páratlan, akkor csak sinus-os tagokat tartalmaz.

▼ 6. 3. 6. Tétel

Ha $f(x)$ 2π szerint periodikus, szakaszonként monoton és folytonos függvény, akkor Fourier-sora konvergens.

Az $f(x)$ folytonossági helyein a sor összege $f(x)$ -szel, a szakadási pontokban pedig a jobb- és baloldali határérték számtani közepével egyenlő. $\square$

$2l$ szerint periodikus, a $[-l, l]$ intervallumon $f(x)$ **függvény Fourier sorának** meghatározásához az intervallumot 2π hosszúságúvá alakíthatjuk a $z = \frac{\pi x}{l}$ transzformációval. Így az $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ ($-\pi < z < \pi$) függvény már 2π -szerint periódikus, Fourier sora

$$f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nz) + b_n \sin(nz))$$

Az $x = \frac{lz}{\pi}$ helyettesítéssel

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right),$$

a megfelelő integrálok pedig:

$$a_0 = \frac{\int_{-l}^l f(x) dx}{2l} \quad a_n = \frac{\int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx}{l} \quad b_n = \frac{\int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx}{l}$$

▼ 6. 4. Fourier sor meghatározása a Maple-lel

Használt Maple parancsok: [piecewise](#), [value](#)

Az F_n értéke legyen a Fourier-sor n -edik részletösszege, az F_{sor} változó pedig legyen maga a meghatározandó Fourier-sor.

> restart : assume(k, integer) :

$$> Fn := a0 + \sum_{k=1}^n (a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)) :$$

$$> F_{sor} := a0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)) :$$

Hozzuk létre az együtthatókat, $a0$ értékét értékadással, $a(k)$ és $b(k)$ pedig a k változó függvényei legyenek:

$$\begin{aligned} > a0 := \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right) : a := k \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) : b := k \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) : \end{aligned}$$

Ezek után két formális kifejezést is kaptunk: Fn a Fourier-sor n -edik részletösszege, F_{sor} maga a Fourier-sor formális kifejezése:

> Fn, F_{sor}

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\pi} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \cos(kx)}{\pi} \right. \\ \left. + \frac{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx)}{\pi} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \cos(kx)}{\pi} \right. \\ \left. + \frac{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx)}{\pi} \right) \end{aligned}$$

A Fourier-sor részletösszegei és a függvény együttes ábrázolására *eljárást* készítünk. Az eljárás elkészíti a 2π szerint periodikus f függvény és a Fourier-sor N -edik részletösszegeinek együttes ábráját a $[-\pi, \pi]$, vagy a $[-3\pi, 3\pi]$ intervallumon, aszerint, hogy a második formális paramétert 1-nek, vagy 2-nek választjuk. Az első paraméter a függvény, a harmadik pedig az ábrázolandó részletösszegek száma. A *display* utasítással megjeleníthetjük az animációt alkotó ábrákat:

```
> Fplot := proc(f, s, N)
  local fl, Fou;
  global K, n;
  n := 'n';
  for n to N do
    Fn;
    Fou := unapply(Fn, x);
```

```

    fl := x → piecewise( - Pi <= x and x <= Pi, f(x), - 3 * Pi <= x and x < - Pi,
    f(x + 2 * Pi), Pi < x and x <= 3 * Pi, f(x - 2 * Pi) );
    kep||n := plot( [Fou(x), fl(x)], x = - Pi - (s - 1) * 2 * Pi .. Pi + (s - 1) * 2 * Pi,
    color = [red, blue], thickness = [2, 2], scont = true)
end do
end proc :

```

- 3. Példa** Legyen $f(x) = |x|$ ha $x \in [-\pi, \pi]$ valamint a $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Adjuk meg a függvény Fourier sorát és a 7. részletösszeget.
 - Ábrázoljuk a függvényt és 5. részletösszegét azonos koordináta-rendszerben.
 - Az *Fplot* eljárás segítségével készítsünk animációt a 12. részletösszegig.

Megoldás a;

A *piecewise* parancs használata lehetővé teszi, hogy szakaszosan adott függvényt definiáljunk.

> $f := x \rightarrow |x|$:

```

fl := x → piecewise( -π ≤ x and x ≤ π, f(x), - 3 π ≤ x and x < -π, f(x + 2 π), π < x
and x ≤ 3 π, f(x - 2 π) ) :

```

> $n := 5 : Fn, F_{sor}$

$$\frac{1}{2} \pi + \sum_{k=1}^5 \frac{2((-1)^k - 1) \cos(kx)}{k^2 \pi}$$

$$\frac{1}{2} \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1) \cos(kx)}{k^2 \pi}$$

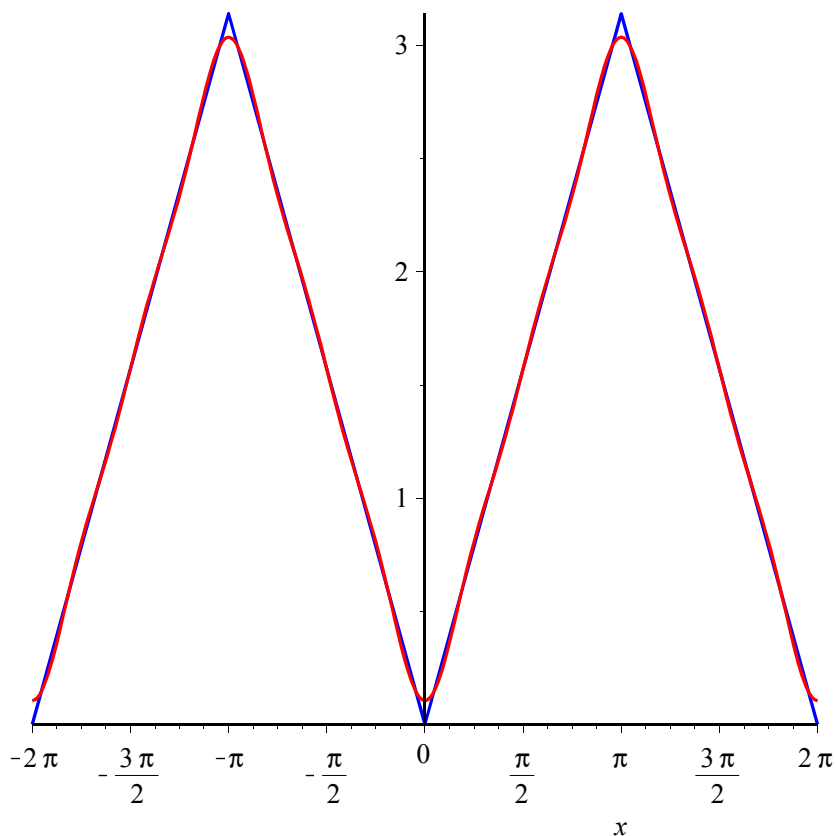
A *value* segítségével "kibonthatjuk" az összeget:

> $value(Fn)$

$$\frac{1}{2} \pi - \frac{4 \cos(x)}{\pi} - \frac{4}{9} \frac{\cos(3x)}{\pi} - \frac{4}{25} \frac{\cos(5x)}{\pi}$$

b;

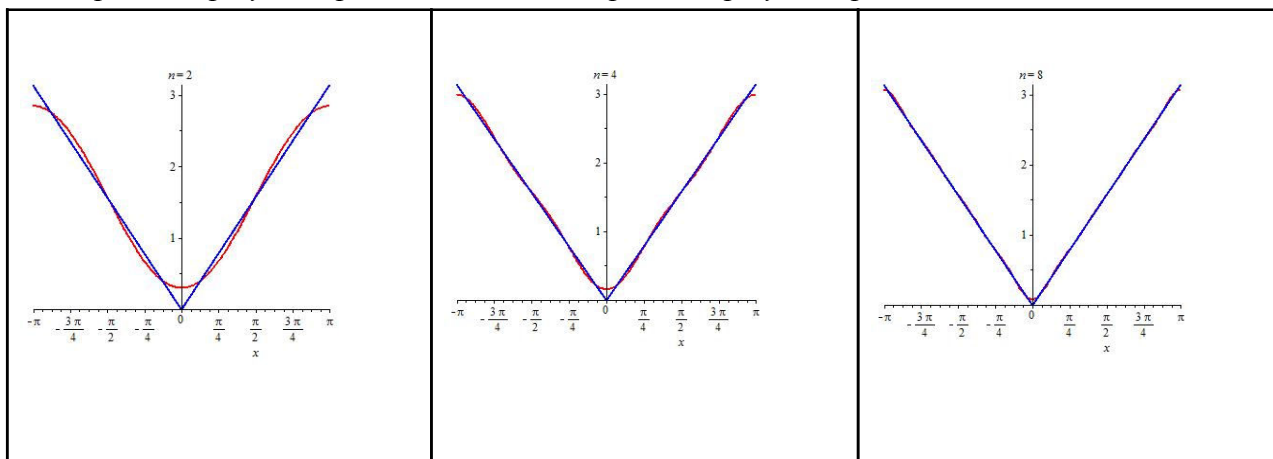
> $plot([fl(x), Fn], x = -2 \pi .. 2 \pi, color = [blue, red])$



c;

> `Fplot(f, 1, 12) :`

> `plots[display]([ [kep|| (1..12) ], insequence = true) : plots[display]([ [kep|| 2], title='n = 2' ) : plots[display]([ [kep|| 4], title='n = 4' ) : plots[display]([ [kep|| 8], title='n = 8' ) :`



4. Példa a; Állítsuk elő az f függvény Fourier-sorát, ha $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi, \pi]$ és $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelenítsük meg animációval a Fourier-sor részletösszegeit!

b; Mutassuk meg a sorfejtés segítségével, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!

Megoldás

a;

> $f := x \rightarrow x^2$;

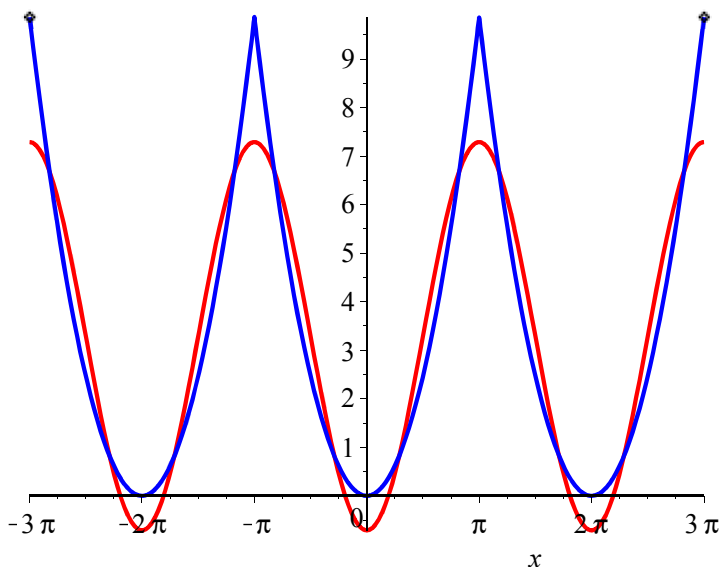
$f1 := x \rightarrow \text{piecewise}(-\pi \leq x \text{ and } x \leq \pi, f(x), -3\pi \leq x \text{ and } x < -\pi, f(x + 2\pi), \pi < x \text{ and } x \leq 3\pi, f(x - 2\pi))$;

> $n := 5 : \text{value}(Fn); F_{\text{sor}}$

$$\frac{1}{3} \pi^2 - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{4}{25} \cos(5x)$$

$$\frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 (-1)^k \cos(kx)}{k^2}$$

> $F_{\text{plot}}(f, 2, 10) : \text{plots}[display]([k \pi | (1..10)], \text{insequence} = \text{true})$



b;

Írjunk x helyébe π -t:

> $n := 12 : \text{subs}(x = \pi, Fn)$

$$\frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{k=1}^{12} \frac{4 (-1)^k \cos(\pi k)}{k^2}$$

Használjuk fel, hogy $\cos(2k\pi) = 1$ és $\cos((2k-1)\pi) = -1$, adódik $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$. Vagyis az egyenlőség jobb oldalán, a zárójelben lévő kifejezés a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ összeg. Így egyenletrendezéssel adódik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A tetszőleges periódusú függvények Fourier sora n -edik részletösszegének felírására és

ábrázolására eljárást készítünk, így feladataink könnyen kezelhetővé válnak.

	Maple megvalósítás
Input f: függvény, l: félperiódus hossza, n: hanyadik részletösszeg $a_0 = \frac{\int_{-l}^l f(x) \, dx}{2l},$ $a_n = \frac{\int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx}{l},$ $b_n = \frac{\int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx}{l}$ $Fn = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right)$ Output F_n	Input f: függvény, $x0$: a periódus bal végpontja, L: a periódus hossza, n: hanyadik részletösszeg > $FourierSeries := \mathbf{proc}(f, x0, L, n)$ $\mathbf{local} \, f0, a0, a, b, F_{sor}, l;$ $\mathbf{global} \, F_n;$ $\mathbf{assume}(k, integer);$ $l := L/2;$ $a0 := 1 * (int(f(x), x=x0..x0+2*l)) / (2$ $* l);$ $a := k \rightarrow 1 * (int(f(x) * \cos(k * \text{Pi} * x/l), x=x0$ $..x0+2*l)) / l;$ $b := k \rightarrow 1 * (int(f(x) * \sin(k * \text{Pi} * x/l), x=x0$ $..x0+2*l)) / l;$ $F_n := a0 + \text{Sum}(a(k) * \cos(k * \text{Pi} * x/l) + b(k)$ $* \sin(k * \text{Pi} * x/l), k=1..n)$ $\mathbf{end proc} :$ > $f := x \rightarrow x$ $f := x \rightarrow x$ > $F_n := \text{value}(FourierSeries(f, -1, 2, 5))$ $F_n := \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(x \pi)}{\pi^2} - \frac{4}{9} \frac{\cos(3 x \pi)}{\pi^2}$ $- \frac{4}{25} \frac{\cos(5 x \pi)}{\pi^2}$ >

Az animációs ábrák elkészítéséhez felhasználjuk a *FourierSeries* eljárást.

	Maple megvalósítás
Input f: függvény, l: félperiódus hossza, N: hanyadik részletösszeg $a_0 = \frac{\int_{-l}^l f(x) \, dx}{2l},$	Input f: függvény, $x0$: a periódus bal végpontja, L: a periódus hossza, N: hanyadik részletösszeg > $FourierPlot := \mathbf{proc}(f, x0, L, N)$ $\mathbf{local} \, Fou, F_n, fl;$ $\mathbf{global} \, K, n;$ $n := 'n';$ $\mathbf{for} \, n \, \mathbf{to} \, N \, \mathbf{do}$ $F_n := FourierSeries(f, x0, L, n);$ $Fou := unapply(F_n, x);$ $fl := x \rightarrow \text{piecewise}(x0 \leq x \, \mathbf{and}$ $x \leq x0 + L, f(x), x0 - L \leq x$ $\mathbf{and} \, x < x0, f(x + L), x0 + L$

$$a_n = \frac{\int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right) dx}{l}, \quad b_n =$$

$$\frac{\int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) dx}{l}$$

$F_n =$

$$a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k \pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k \pi x}{l}\right) \right)$$

függvény kiterjesztése 3 periódusra

függvény és részletösszeg ábrázolás $n=1$ -től N -ig

Output

függvény és részletösszeg ábra $n=1$ -től N -ig

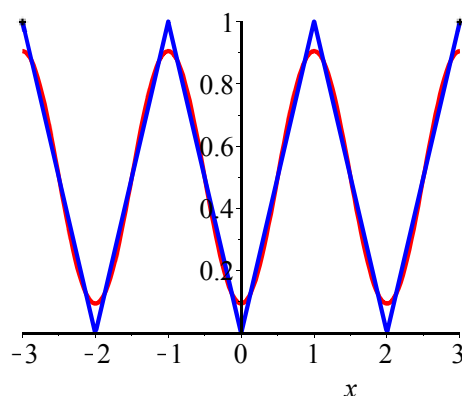
```
< x and x <= x0 + 2 * L,
f(x - L));
kep||n := plot([Fou(x), fl(x)], x
= x0 - L..x0 + 2 * L, color
= [red, blue], thickness = [2, 2],
discont = true)
```

end do

end proc :

```
> f := x -> |x| : FourierPlot(f, -1, 2, 10) :
```

```
> plots[display]([kep|| (1..10)],
insequence = true)
```



▼ 6. 5. Feladatok

1. feladat Írjuk fel a következő függvények $x_0=0$ körüli Taylor sorát.

a; $y = e^{-x}$

b; $y = e^{x^2}$

c; $y = x \cdot e^{-x^2}$

d; $y = \sin 2x$

e; $y = \cos^2 x$

f; $y = \ln(1-x)$

2. feladat Határozzuk meg a következő 2π -szerint periódikus függvények Fourier sorát, ábrázoljuk a függvényt és a részletösszegek sorozatát.

a;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = k\pi \end{cases}$$

$$b; f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

c; $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$d; f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leq x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} + x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad e; f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$f; f(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

3. feladat Határozzuk meg a következő $2l$ -szerint periódikus függvények Fourier sorát, ábrázolja a függvényt és a részletösszegek sorozatát.

$$a; f(x) = \{x\} \quad (x \text{ egész része}) \quad b; f(x) = [x] \quad (x \text{ tört része})$$

▼ 6.6. Ellenőrző kérdések

1. Taylor polinom, Taylor sor fogalma, együtthatóinak meghatározása.
2. 2π -szerint periódikus függvény Fourier együtthatóinak meghatározása.
3. $2l$ -szerint periódikus függvény Fourier sora.